Problemes

Un llarg lapse de temps des del darrer contacte amb els lectors d'aquesta secció! Entremig hi ha hagut prou temps per tal que cap dels problemes proposats no hagi estat resolt: el nostre agraïment als nostres entusiastes col·laboradors!

Parlem de les solucions: hem rebut, encara, una altra solució del problema **A55**, d'en Miquel Amengual, de Mallorca, que mereix ser publicada per la seva senzillesa.

Del problema **A56**, n'hem rebut solucions d'Albert Ferreiro, estudiant a la UAB, i de Josep Anton Clua, de l'IES Duc de Montblanc, les quals mostren, amb les restriccions de l'enunciat, els procediments per determinar els punts $(x, a + x)$ i (x, ax) que, en el fons, són els únics que es necessiten per determinar el punt $(x\,,\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$. Però, quan en preparàvem l'edició, no podíem treure'ns del cap aquell acudit en què un matemàtic és despertat pel fum d'un incendi a la cuina de casa seva, acudeix al lloc de les flames, hi veu un extintor i després d'exclamar «Té solució!» se'n torna al llit tan content... Així, doncs, hem preferit publicar com a solució la base matemàtica del «Constructor universal d'equacions», dispositiu mecànic descrit a l'*Encyclopédie* de **Diderot** i **D'Alembert**.

Del problema **A59**, n'hem rebut una solució, una referència històrica i una altra de bibliogràfica: en efecte, una petita variant d'aquest problema (en la qual s'afegeix la condició que a i b siguin també positius) fou proposat per Alemanya per a la Olimpíada Matemàtica Internacional del 1988 i s'ha fet, certament, ben famosa. La solució que hem rebut es refereix a aquesta variant, però, i en conseqüència, hem optat per publicar la nostra pròpia solució. Per cert, potser és interessant saber que aquest mateix problema va ser proposat el 1995 al procés selectiu per a l'ingrés al Cos de Professors d'Ensenyament Secundari...

El professor Miquel Amengual, a més, ha volgut compartir amb tots nosaltres la seva «victòria» sobre l'enunciat **A60** que ja havia estat proposat dues vegades! La Geometria, la Geometria!

Finalment, en Josep Anton Clua ens envia una elegant solució del problema **A61**, que havia estat proposat per José Luis Díaz-Barrero, de la UPC.

El mateix José Luis Díaz-Barrero, segueix amb la seva inestimable col·laboració i ens proposa el problema **A62**, en Pelegrí Viader, de la UPF, l'**A63**, i l'**A64** ens el proporciona en Miquel Amengual, el qual ens demana, si això és possible, una solució més elegant que la que ell va confegir quan tot just era estudiant de segon any de la llicenciatura...

Insistim en els agraïments als lectors que ens proporcionen enunciats de problemes i/o ens n'envien les solucions. El correu electrònic per als enviaments és cromero@pie.xtec.es i els materials escrits en TEX o LaTEX ens faciliten força la feina. Moltíssimes gràcies!

Problemes proposats

A62. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Siguin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nombres positius. Proveu que

$$\frac{a_1}{a_2 + \sqrt{3}a_1a_2^2} + \frac{a_2}{a_3 + \sqrt{3}a_2a_3^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + \sqrt{3}a_na_1^2} \geq \frac{n}{2}\,.$$

A63. (Proposat per Pelegrí Viader, UPF.) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i $f(0) = f(1)$, demostreu que:

a) Per cada enter positiu n existeix una «corda horitzontal» del graf de f (una «corda horitzontal» és el segment que uneix dos punts del graf amb la mateixa ordenada) de longitud $1/n$.

b) Demostreu que f no té perquè tenir necessàriament cordes horitzontals amb longitud que no sigui el recíproc d'un nombre enter.

(Teorema de la corda universal.)

A64. (Proposat per Miquel Amengual, Cala Figuera, Mallorca, a partir d'un enunciat del Dr. Josep Teixidor del 1969.) A $\mathbb{R}^3$ hi considerem un paraboloide el·líptic. Trobeu el lloc geomètric dels centres de les esferes que tallen el paraboloide segons parelles de circumferències.

A65. Demostreu que, per a tot nombre enter i positiu n, hi ha una potència de 2, expressada en base 10, les n últimes xifres de la qual són tots uns o dosos. Per exemple, per a $n = 1$, $2^5 = 32$ i, per a $n = 2$, $2^9 = 512$.

Solucions

A55. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Donats els nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$, tots diferents de zero, proveu que l'equació

$$ax^2 + 2(ab+bc+ca)x + 3bc(a+b+c) = 0$$

té totes les seves arrels reals.

Solució: (Solució d'en Miquel Amengual, Cala Figuera, Mallorca.) Només cal observar que el discriminant de l'equació és una suma de quadrats de nombres reals i que és, per tant, més gran o igual que zero:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\left[(ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c)\right] = \\ &= 4\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2\right) = \\ &= 2\left[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2\right] \geq 0\end{aligned}$$

i la igualtat es compleix si, i només si, $a = b = c$.

A56. Disposem d'un sistema de dos eixos de coordenades amb graduació, $n+1$ nombres reals $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i una abscissa x. Cal, fent servir només un regle sense graduar (que no val per a traslladar distàncies) i un escaire o cartabó per a tirar perpendiculars, determinar el punt

$$(x\,,\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)\,.$$

Solució: (Solució de la redacció.) A partir dels coeficients del polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, considerem els nombres

$$\begin{aligned}A_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ A_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_i &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-i-1} + a_{n-i} \\ A_{i+1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-i-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 &= a_0 + a_1 \\ A_0 &= a_0\end{aligned}$$

i els polinomis

$$\begin{aligned}p_0(x) &= A_0 \\ p_1(x) &= A_1 + a_nx \\ p_2(x) &= A_2 + a_{n-1}x + a_nx^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_i(x) &= A_i + a_{n-i+1}x + a_{n-i+2}x^2 + \\ &\qquad + \cdots + a_nx^i \\ p_{i+1}(x) &= A_{i+1} + a_{n-i}x + a_{n-i+1}x^2 + \\ &\qquad + a_{n-i+2}x^3 + \cdots + a_nx^{i+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n(x) &= A_n + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,.\end{aligned}$$

Ja es veu que $p(x) = p_n(x)$. Ara tenim

$$A_{i+1} = A_i - a_{n-i}$$

$$\begin{aligned}p_{i+1}(x) &= xp_i(x) - A_ix + A_{i+1} + a_{n-i}x = \\ &= xp_i(x) - x(A_i - a_{n-i}) + A_{i+1} = \\ &= xp_i(x) - xA_{i+1} + A_{i+1} = \\ &= xp_i(x) + (1-x)A_{i+1}\end{aligned}$$

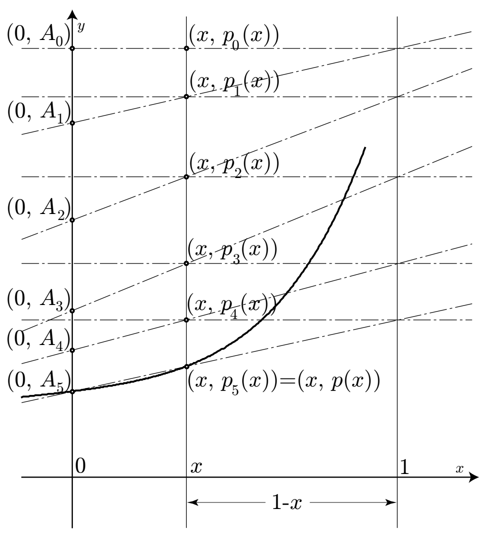
i, per tant,

$$\begin{aligned}p_i(x) - p_{i+1}(x) &= p_i(x) - xp_i(x) - (1-x)A_{i+1} = \\ &= (1-x)p_i(x) - (1-x)A_{i+1} = \\ &= (1-x)(p_i(x) - A_{i+1})\end{aligned}$$

o sigui,

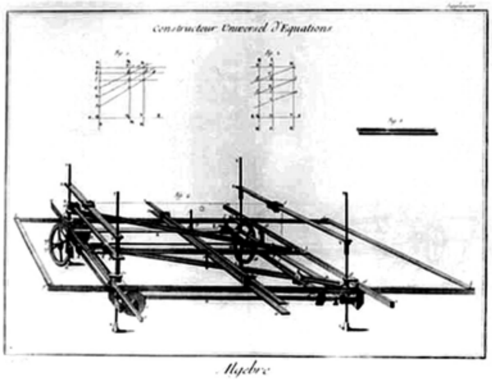
$$\frac{p_i(x) - p_{i+1}(x)}{1-x} = \frac{p_i(x) - A_{i+1}}{1}\,. \qquad (*)$$

Ara, a la figura següent, un cop posats els punts $(0, A_0)$, $(0, A_1)$, $\ldots$, $(0, A_n)$ sobre l'eix d'ordenades i dibuixada la recta $x = 1$ i la paral·lela a ambdues que passa per $(x, 0)$, hom pot dibuixar successivament les rectes corresponents a la proporció $(*)$, sense transgredir cap de les limitacions que imposa l'enunciat.



Addendum: Aquestes proporcions es materialitzen en el mecanisme conegut com a «Constructor universal d'equacions», ja descrit a l'*Encyclopédie* de **Diderot** i **D'Alembert** (1751).

I a http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/museum/constructeur_ue/java/constructeur_ue_g3_cat.html hi trobareu un *applet* que en reprodueix el funcionament.



A59. Siguin a, b i m nombres enters tals que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = m \geq 0\,.$$

Cal demostrar que, llavors, m és un quadrat perfecte.

Solució: (Solució de la redacció.)

a) Si un dels dos nombres és zero, la proposició és trivial.

b) Suposem que $a = b$. Llavors tenim:

$$\begin{aligned} 0 \leq m = \frac{2a^2}{a^2+1} \quad &\Longrightarrow \\ 2a^2 = ma^2 + m \quad &\Longrightarrow \\ (2-m)a^2 = m \geq 0\,. \end{aligned}$$

Només pot ser $m = 0$, que és un quadrat perfecte, i $m = 1$, que també ho és. Els valors corresponents per a a són $a = 0$ i $a = \pm 1$ respectivament.

c) No és possible que $a \neq 0$ i $b \neq 0$ siguin de signes diferents. En efecte, com que $a^2+b^2 > 0$, ha de ser $ab+1 > 0$, cosa impossible en aquestes condicions.

d) Suposem $0 < a < b$. Llavors

$$b^2 - amb + a^2 - m = 0$$

és una equació de segon grau en la incògnita b, amb, en principi, dues solucions: la mateixa b i una altra, que anomenarem b'. Es compleix que

$$b + b' = am\,; \quad bb' = a^2 - m\,.$$

Com que $b > a$, podem escriure:

$$ab' < bb' = a^2 - m < a^2 \quad \Longrightarrow \quad b' < a\,.$$

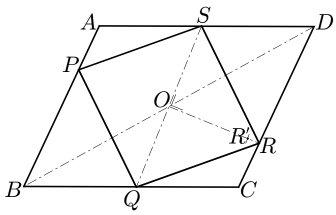
Acabem de mostrar, doncs, que si $0 < a < b$ produeixen un $m > 0$ enter, llavors també el produeixen $0 \leq am - b < a$. (Que $am - b \geq 0$ està assegurat pel fet que no pot tenir signe diferent de a.)

e) L'aplicació reiterada del procés anterior dóna una successió estrictament decreixent de nombres enters en la qual no pot haver-hi dos elements contigus de signe diferent. Això implica que aquesta successió conté el zero i, contigu, el nombre enter i positiu $\sqrt{m} = \text{m.c.d.}(a, b)$.

A60. Donats un rectangle i un paral·lelogram, cal inscriure en el paral·lelogram un rombe de la mateixa àrea que el rectangle.

Solució: (Solució d'en Miquel Amengual, Cala Figuera, Mallorca.)

a) Anàlisi: Siguin P, Q, R i S punts sobre els costats AB, BC, CD i DA del paral·lelogram $ABCDE$ de manera que $PQRS$ és un rombe d'àrea igual a k^2. Sigui O el punt intersecció de BD i QS.



Els triangles $\triangle PBQ$ i $\triangle RDS$ són semblants (tenen els costats paral·lels) i com que $PQ = RS$, són iguals. En particular, $BQ = DS$. D'aquí que els triangles $\triangle OBQ$ i $\triangle ODS$, que són semblants, siguin també iguals. En particular, $BO = OD$ i $QO = OS$, d'on resulta immediatament que el punt O és el centre dels dos paral·lelograms $ABCD$ i $PQRS$.

Si escrivim l'àrea del rombe com el semiproducte de les seves diagonals, obtenim

$$OR{\cdot}OS = \frac{k^2}{2}$$

i, si R' és un punt de la semirrecta OR amb $OR' = OS$, llavors

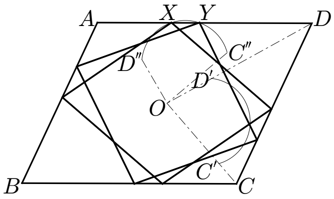
$$OR{\cdot}OR' = \frac{k^2}{2}$$

és a dir, R' és l'invers del punt R en la inversió de pol O i potència $k^2/2$.

Finalment, $\widehat{SOR'} = \pi/4$ perquè les diagonals d'un rombe són perpendiculars.

b) Construcció: Invertim el segment CD en la inversió de pol el centre del paral·lelogram i potència $k^2/2$. (En el nostre cas, si a i b són les dimensions del rectangle donat, llavors $k^2 = ab$ i el radi r de la circumferència d'autoinversió és igual a $\sqrt{ab/2}$. La construcció de r és ben coneguda i es mostra al final.)

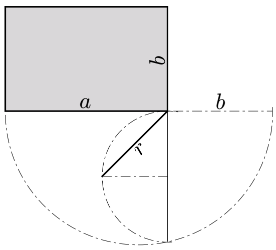
Aplicam a la figura obtinguda (un arc de circumferència) una rotació de centre el del paral·lelogram i amplitud $\pi/4$.



La intersecció d'aquest nou arc de circumferència amb AD és un vèrtex del rombe que cercam. Com que el seu centre és conegut (coincideix, com s'ha dit, amb el del paral·lelogram $ABCD$) la construcció del rombe resulta immediata.

c) Discussió: És clar que el problema pot tenir dues, una o cap solució. La figura anterior mostra un cas amb dues solucions: l'arc $C'D'$ és la figura inversa del segment CD. L'arc transformat de l'anterior en la rotació de centre O i angle $\pi/2$ és l'arc $C''YXD''$.

d) Construcció del segment r de longitud $\sqrt{ab/2}$ a partir del rectangle donat:



A61. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Per a tot nombre enter i positiu n, proveu que

$$L_{n+2} < \frac{1}{2}\left(\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}^2}{L_n} + \frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}}\right)$$

on L_n és el terme n-èssim de la «successió de Lucas»:

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ \text{Si } n \geq 2, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\,. \end{cases}$$

Solució: (Solució de Josep Anton Clua Sampietro, IES Duc de Montblanc.) Demostrarem que

$$\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}^2}{L_n} + \frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}} > 2L_{n+2}$$

que és equivalent al resultat demanat.

Observem, primer de tot, que la «successió de Lucas» és creixent i positiva per a n més gran o igual que 1, ja que cada terme és l'anterior més un terme positiu.

Calculem ara l'expressió que se'ns demana:

$$\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}^2}{L_n} + \frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}}\,.$$

Substituïm cada numerador, excepte el primer, per la seva definició en la «successió de Lucas»:

$$\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{(L_{n-1}+L_n)^2}{L_n} + \frac{(L_n+L_{n+1})^2}{L_{n+1}}$$

i desenvolupem els quadrats i simplifiquem

$$\begin{aligned} &\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n-1}^2 + L_n^2 + 2L_{n-1}L_n}{L_n} + \\ &+ \frac{L_n^2 + L_{n+1}^2 + 2L_nL_{n+1}}{L_{n+1}} = \\ &= \frac{L_n^2}{L_{n+2}} + L_n + 2L_{n-1} + \frac{L_{n-1}^2}{L_n} + \\ &+ \frac{L_n^2}{L_{n+1}} + 2L_n + L_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Si ara reordenem i apliquem la definició de la «successió de Lucas», tenim:

$$\begin{aligned} &\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n-1}^2}{L_n} + \frac{L_n^2}{L_{n+1}} L_n + L_{n-1} + \\ &+ L_{n-1} + L_n + L_n + L_{n+1} = \\ &= \frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n-1}^2}{L_n} + \frac{L_n^2}{L_{n+1}} + \\ &+ L_{n+1} + L_{n-1} + L_n + L_{n+2} \end{aligned}$$

i, en eliminar els termes fraccionaris i el terme L_{n-1}, tenim

$$\begin{aligned} &\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}^2}{L_n} + \frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}} \geq \\ &\geq L_{n+1} + L_n + L_{n+2} = 2L_{n+2} \end{aligned}$$

com volíem provar.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga